万年カレンダーの証明

作成日：2017 年 01 月 16 日

更新日：2017 年 05 月 12 日

鈴木健太郎

y, m, dを$1 \le y \le 9999,\ 1 \le m \le 12,\ 1 \le d \le 31$である任意の整数とする．$y', m'$を

$$y' = \begin{cases} y & 3 \le m\text{のとき} \\ y-1 & 3 \nleq m\text{のとき} \end{cases}$$

かつ

$$m' = \begin{cases} m & 3 \le m\text{のとき} \\ m+12 & 3 \nleq m\text{のとき} \end{cases}$$

とする．$q_i, r_i, i = 1,2,\cdots,6$を，

$$y' = 2000q_1 + r_1, \qquad 0 \le r_1 < 2000,$$

$$r_1 = 400q_2 + r_2, \qquad 0 \le r_2 < 400,$$

$$r_2 = 100q_3 + r_3, \qquad 0 \le r_3 < 100,$$

$$r_3 = 20q_4 + r_4, \qquad 0 \le r_4 < 20,$$

$$r_4 = 4q_5 + r_5, \qquad 0 \le r_5 < 4,$$

$$r_5 = 1q_6 + r_6, \qquad 0 \le r_6 < 1$$

である整数とする．$u_i, v_i, i = 1,2$を，

$$d = 7u_1 + v_1, \qquad 0 \le v_1 < 7,$$

$$v_1 = 1u_2 + v_2, \qquad 0 \le v_2 < 1$$

である整数とする．また，関数$f_1: \{1,2,\cdots,12\} \to \{0,1,\cdots,6\}$を，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 0 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

と定義する．するとこのとき，

万年カレンダーの証明

(i)　$0 \leq q_1 < 5,\ 0 \leq q_2 < 5,\ 0 \leq q_3 < 4,\ 0 \leq q_4 < 5,\ 0 \leq q_5 < 5,\ 0 \leq q_6 < 4.$

(ii)　$0 \leq u_1 < 5,\ 0 \leq u_2 < 7.$

(iii) あるy, m, dにより$q_1 = 4.$

(iv) あるy, m, dにより$q_2 = 4.$

(v) あるy, m, dにより$q_3 = 3.$

(vi) あるy, m, dにより$q_4 = 4.$

(vii) あるy, m, dにより$q_5 = 4.$

(viii) あるy, m, dにより$q_6 = 3.$

(ix) あるy, m, dにより$u_1 = 4.$

(x) あるy, m, dにより$u_2 = 6.$

(xi)　$f_1(m) + 0u_1 + 1u_2 + 0q_1 + 0q_2 + 5q_3 + 4q_4 + 5q_5 + 1q_6 \equiv y' + \left\lfloor \frac{y'}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y'}{100} \right\rfloor +$

$\left\lfloor \frac{y'}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{13m'+8}{5} \right\rfloor + d \qquad (mod\ \ 7).$

が成り立つ（(xi)の右辺が **Zeller 公式**）.

証明　　始めに(i)を証明する．　$3 \leq m$のときは，定義により$y' = y$である．すると$0 \leq 1 \leq y \leq 9999 < 10000$なので，補題 2 より(i)は成り立つ．$3 \nleq m$のときは，定義により$y' = y - 1$であり，$0 \leq y - 1 \leq 9998 < 10000$だから，補題 2 より(i)は成り立つ．(ii)については，$0 \leq 1 \leq d \leq 31 < 32$であることから，補題 2 より成り立つ．続いて(iii)の証明に移る．$y = 8000,\ m = 3,\ d = 1$の場合，定義より$y' = y = 8000$であり，

$$8000 = 2000 \cdot 4 + 0, \qquad 0 \leq 0 < 2000,$$

$$0 = 400 \cdot 0 + 0, \qquad 0 \leq 0 < 400,$$

$$0 = 100 \cdot 0 + 0, \qquad 0 \leq 0 < 100,$$

$$0 = 20 \cdot 0 + 0, \qquad 0 \leq 0 < 20,$$

$$0 = 4 \cdot 0 + 0, \qquad 0 \leq 0 < 4,$$

$$0 = 1 \cdot 0 + 0, \qquad 0 \leq 0 < 1$$

なので，よって$q_1 = 4$となる．(iv)については，$y = 1600$, $m = 3$, $d = 1$の場合，定義より$y' = y = 1600$であり，

$$1600 = 2000 \cdot 0 + 1600, \qquad 0 \leq 1600 < 2000,$$

$$1600 = 400 \cdot 4 + 0, \qquad 0 \leq 0 < 400,$$

$$0 = 100 \cdot 0 + 0, \qquad 0 \leq 0 < 100,$$

$$0 = 20 \cdot 0 + 0, \qquad 0 \leq 0 < 20,$$

$$0 = 4 \cdot 0 + 0, \qquad 0 \leq 0 < 4,$$

$$0 = 1 \cdot 0 + 0, \qquad 0 \leq 0 < 1$$

だから，よって$q_2 = 4$となる．同様にして，(v)については，$y = 300$, $m = 3$, $d = 1$のとき，

(vi)については，$y = 80$, $m = 3$, $d = 1$のとき，(vii)については，$y = 16$, $m = 3$, $d = 1$のとき，(viii)については，$y = 3$, $m = 3$, $d = 1$のときを考えるとよい．さらに，(ix)については，$y = 1$, $m = 1$, $d = 28$のとき，(x)については，$y = 1$, $m = 1$, $d = 6$のときを考えるとよい．それでは，(xi)を証明する．始めに，補題 1 より

$$0q_1 + 0q_2 + 5q_3 + 4q_4 + 5q_5 + 1q_6 \equiv y' + \left\lfloor \frac{y'}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y'}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y'}{400} \right\rfloor \qquad (mod\ \ 7)$$

が成り立つ．また，

$$f_1(m) \equiv \left\lfloor \frac{13m' + 8}{5} \right\rfloor \qquad (mod\ \ 7)$$

であることは容易に確認できる．

$$0u_1 + 1u_2 \equiv 7u_1 + 1u_2 = d \qquad (mod\ \ 7)$$

であることを考え合わせると，

$$f_1(m) + 0u_1 + 1u_2 + 0q_1 + 0q_2 + 5q_3 + 4q_4 + 5q_5 + 1q_6$$

$$= f_1(m) + (0u_1 + 1u_2) + (0q_1 + 0q_2 + 5q_3 + 4q_4 + 5q_5 + 1q_6)$$

$$\equiv \left\lfloor \frac{13m' + 8}{5} \right\rfloor + d + \left(y' + \left\lfloor \frac{y'}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y'}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y'}{400} \right\rfloor \right)$$

$$= y' + \left\lfloor \frac{y'}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y'}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y'}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{13m'+8}{5} \right\rfloor + d \qquad (mod\ \ 7)$$

が成り立つ．■

補題 1． xを$0 \leq x$である任意の整数とする．$q_i, r_i, i = 1,2,\cdots,6$を，

$$x = 2000q_1 + r_1, \qquad 0 \leq r_1 < 2000,$$

$$r_1 = 400q_2 + r_2, \qquad 0 \leq r_2 < 400,$$

$$r_2 = 100q_3 + r_3, \qquad 0 \leq r_3 < 100,$$

$$r_3 = 20q_4 + r_4, \qquad 0 \leq r_4 < 20,$$

$$r_4 = 4q_5 + r_5, \qquad 0 \leq r_5 < 4,$$

$$r_5 = 1q_6 + r_6, \qquad 0 \leq r_6 < 1$$

である整数とする．するとこのとき，

$$0q_1 + 0q_2 + 5q_3 + 4q_4 + 5q_5 + 1q_6 \equiv x + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{400} \right\rfloor \qquad (mod\ \ 7)$$

が成り立つ．

証明　　$o_i, p_i, i = 1,2,3,4$を

$$x = 400o_1 + p_1, \qquad 0 \leq p_1 < 400,$$

$$x = 100o_2 + p_2, \qquad 0 \leq p_2 < 100,$$

$$x = 4o_3 + p_3, \qquad 0 \leq p_3 < 4,$$

$$x = 1o_4 + p_4, \qquad 0 \leq p_4 < 1$$

である整数とする．するとこのとき

$$x = 400o_1 + p_1$$

かつ

$$x = 2000q_1 + 400q_2 + r_2$$

だから，$p_1 \equiv x \equiv r_2 \pmod{400}$である．すると，$0 \le p_1 < 400,\ 0 \le r_2 < 400$なので，よって$p_1 = r_2$が成り立つ．ゆえに

$$400o_1 = 2000q_1 + 400q_2$$

であり，よって

$$o_1 = 5q_1 + q_2$$

である．さらに,

$$x = 100o_2 + p_2$$

かつ

$$x = 2000q_1 + 400q_2 + 100q_3 + r_3$$

だから，$p_2 \equiv x \equiv r_3 \pmod{100}$である．すると，$0 \le p_2 < 100,\ 0 \le r_3 < 100$なので，よって$p_2 = r_3$が成り立つ．ゆえに

$$100o_2 = 2000q_1 + 400q_2 + 100q_3$$

であり，よって

$$o_2 = 20q_1 + 4q_2 + q_3$$

である．また,

$$x = 4o_3 + p_3$$

かつ

$$x = 2000q_1 + 400q_2 + 100q_3 + 20q_4 + 4q_5 + r_5$$

だから，$p_3 \equiv x \equiv r_5 \pmod{4}$である．すると，$0 \le p_3 < 4,\ 0 \le r_5 < 4$なので，よって$p_3 = r_5$が成り立つ．ゆえに

$$4o_3 = 2000q_1 + 400q_2 + 100q_3 + 20q_4 + 4q_5$$

かつ

$$o_3 = 500q_1 + 100q_2 + 25q_3 + 5q_4 + q_5$$

である．そして,

$$x = o_4$$

かつ

$$x = 2000q_1 + 400q_2 + 100q_3 + 20q_4 + 4q_5 + 1q_6$$

だから

$$o_4 = 2000q_1 + 400q_2 + 100q_3 + 20q_4 + 4q_5 + 1q_6$$

である．したがって，

$$x + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{400} \right\rfloor$$

$$= o_4 + o_3 - o_2 + o_1$$

$$= (2000q_1 + 400q_2 + 100q_3 + 20q_4 + 4q_5 + 1q_6) + (500q_1 + 100q_2 + 25q_3 + 5q_4 + q_5) - (20q_1 + 4q_2 + q_3) + (5q_1 + q_2)$$

$$= (2000 + 500 - 20 + 5)q_1 + (400 + 100 - 4 + 1)q_2 + (100 + 25 - 1)q_3 + (20 + 5)q_4 + (4 + 1)q_5 + 1q_6$$

$$= 2485q_1 + 497q_2 + 124q_3 + 25q_4 + 5q_5 + 1q_6$$

$$\equiv 0q_1 + 0q_2 + 5q_3 + 4q_4 + 5q_5 + 1q_6 \qquad (mod\ \ 7)$$

が成り立つ． ■

補題 2. x, yを$0 \leq x < 10000$，$0 \leq y < 32$である任意の整数とする．$q_i, r_i, i = 1,2,\cdots,6$を，

$$x = 2000q_1 + r_1, \qquad 0 \leq r_1 < 2000,$$

$$r_1 = 400q_2 + r_2, \qquad 0 \leq r_2 < 400,$$

$$r_2 = 100q_3 + r_3, \qquad 0 \leq r_3 < 100,$$

$$r_3 = 20q_4 + r_4, \qquad 0 \leq r_4 < 20,$$

$$r_4 = 4q_5 + r_5, \qquad 0 \leq r_5 < 4,$$

$$r_5 = 1q_6 + r_6, \qquad 0 \leq r_6 < 1$$

である整数とする．$u_i, v_i, i = 1,2$を，

$$y = 7u_1 + v_1, \qquad 0 \le v_1 < 7,$$

$$v_1 = 1u_2 + v_2, \qquad 0 \le v_2 < 1$$

である整数とする．するとこのとき，

(i)　$0 \le q_1 < 5$，$0 \le q_2 < 5$，$0 \le q_3 < 4$，$0 \le q_4 < 5$，$0 \le q_5 < 5$，$0 \le q_6 < 4$.

(ii)　$0 \le u_1 < 5$，$0 \le u_2 < 7$.

が成り立つ．

証明　始めに(i)を証明する．もし仮に$q_1 < 0$だとすると，$q_1 \le -1$より$2000q_1 \le -2000$かつ$2000q_1 + 2000 \le 0$となるが，一方では$0 \le x = 2000q_1 + r_1 < 2000q_1 + 2000$が成り立つので矛盾する．よって$0 \le q_1$である．同様にして$0 \le q_i$，$i = 2,3,\cdots,6$が成り立つ．また，もし仮に$5 \le q_1$だとすると$10000 \le 2000q_1$だが，一方で$2000q_1 \le 2000q_1 + r_1 = x < 10000$が成り立つので矛盾する．したがって$q_1 < 5$である．同様に$q_2 < 5$，$q_3 < 4$，$q_4 < 5$，$q_5 < 5$，$q_6 < 4$が成り立つ．これで(i)を示した．(ii)についても同様に証明できる．■