曜日計算法の証明

作成日：2016 年 12 月 14 日

更新日：2017 年 01 月 04 日

鈴木健太郎

y, m, dを$1 \leq y$，$1 \leq m \leq 12$，$1 \leq d \leq 31$である任意の整数とする．$q_i, r_i, i = 1,2,\cdots,5$を，

$$\begin{aligned} y-1 &= 400q_1 + r_1, \qquad 0 \leq r_1 < 400, \\ r_1 &= 100q_2 + r_2, \qquad 0 \leq r_2 < 100, \\ r_2 &= 20q_3 + r_3, \qquad 0 \leq r_3 < 20, \\ r_3 &= 4q_4 + r_4, \qquad 0 \leq r_4 < 4, \\ r_4 &= 1q_5 + r_5, \qquad 0 \leq r_5 < 1 \end{aligned}$$

である整数とする．$u_i, v_i, i = 1,2$を，

$$\begin{aligned} d-1 &= 7u_1 + v_1, \qquad 0 \leq v_1 < 7, \\ v_1 &= 1u_2 + v_2, \qquad 0 \leq v_2 < 1 \end{aligned}$$

である整数とする．また，関数$f_1 : \{1,2,\cdots,12\} \to \{0,1,\cdots,6\}$を，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 3 & 3 & 6 & 1 & 4 & 6 & 2 & 5 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

と定義する．そして，Lを，$3 \nleq m$のときは，$L = 0$．$3 \leq m$のときは，

$$L = \begin{cases} 0 & 4 \nmid y\text{のとき} \\ 1 & 4 \mid y\text{かつ }100 \nmid y\text{のとき} \\ 0 & 100 \mid y\text{かつ }400 \nmid y\text{のとき} \\ 1 & 400 \mid y\text{のとき} \end{cases}$$

と決定する．するとこのとき，y', m'を

$$y' = \begin{cases} y & 3 \leq m\text{のとき} \\ y-1 & 3 \nleq m\text{のとき} \end{cases}$$

かつ

$$m' = \begin{cases} m & 3 \leq m\text{のとき} \\ m+12 & 3 \nleq m\text{のとき} \end{cases}$$

として，

$$\begin{aligned} & f_1(m) + 0u_1 + 1u_2 + 0q_1 + 5q_2 + 4q_3 + 5q_4 + 1q_5 + L + 1 \\ & \equiv y' + \left\lfloor \frac{y'}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y'}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y'}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{13m'+8}{5} \right\rfloor + d \quad (mod\, 7) \end{aligned}$$

が成り立つ（右辺が **Zeller 公式**）．

曜日計算法の証明

証明　始めに，$4 \nmid y$であるか，あるいは，$100 \mid y$かつ$400 \nmid y$だとする．このとき，$3 \leq m$だとすると，定義により，$y' = y$かつ$m' = m$である．すると

$$f_1(m) \equiv \left\lfloor \frac{13m+8}{5} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{13m'+8}{5} \right\rfloor + 1 \quad (mod\ 7)$$

が容易に確認できる．また，補題 1，2 より，

$$\begin{aligned} &0q_1 + 5q_2 + 4q_3 + 5q_4 + 1q_5 \\ &\equiv (y-1) + \left\lfloor \frac{(y-1)}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(y-1)}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(y-1)}{400} \right\rfloor \\ &= y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor - 1 = y' + \left\lfloor \frac{y'}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y'}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y'}{400} \right\rfloor - 1 \qquad (mod\ 7) \end{aligned}$$

が成り立つ．定義により，$L = 0$なので，したがって

$$\begin{aligned} &f_1(m) + 0u_1 + 1u_2 + 0q_1 + 5q_2 + 4q_3 + 5q_4 + 1q_5 + L + 1 \\ &= f_1(m) + (0u_1 + 1u_2) + (0q_1 + 5q_2 + 4q_3 + 5q_4 + 1q_5) + L + 1 \\ &\equiv \left(\left\lfloor \frac{13m'+8}{5} \right\rfloor + 1 \right) + (d-1) + \left(y' + \left\lfloor \frac{y'}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y'}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y'}{400} \right\rfloor - 1 \right) + 0 + 1 \\ &= y' + \left\lfloor \frac{y'}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y'}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y'}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{13m'+8}{5} \right\rfloor + d \qquad (mod\ 7) \end{aligned}$$

が成り立つ．$3 \nleq m$のときは，定義により，$y' = y - 1$かつ$m' = m + 12$である．すると

$$f_1(m) \equiv \left\lfloor \frac{13(m+12)+8}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{13m'+8}{5} \right\rfloor \quad (mod\ 7)$$

が容易に確認できる．また，補題 2 より，

$$\begin{aligned} &0q_1 + 5q_2 + 4q_3 + 5q_4 + 1q_5 \\ &\equiv (y-1) + \left\lfloor \frac{(y-1)}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(y-1)}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(y-1)}{400} \right\rfloor \\ &= y' + \left\lfloor \frac{y'}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y'}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y'}{400} \right\rfloor \quad (mod\ 7) \end{aligned}$$

が成り立つ．定義により，$L = 0$なので，したがって

$$\begin{aligned} &f_1(m) + 0u_1 + 1u_2 + 0q_1 + 5q_2 + 4q_3 + 5q_4 + 1q_5 + L + 1 \\ &= f_1(m) + (0u_1 + 1u_2) + (0q_1 + 5q_2 + 4q_3 + 5q_4 + 1q_5) + L + 1 \\ &\equiv \left\lfloor \frac{13m'+8}{5} \right\rfloor + (d-1) + \left(y' + \left\lfloor \frac{y'}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y'}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y'}{400} \right\rfloor \right) + 0 + 1 \\ &= y' + \left\lfloor \frac{y'}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y'}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y'}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{13m'+8}{5} \right\rfloor + d \qquad (mod\ 7) \end{aligned}$$

が成り立つ．

次に，$4 \mid y$かつ$100 \nmid y$であるか，あるいは，$400 \mid y$だとする．このとき，$3 \leq m$だとすると，定義により，$y' = y$かつ$m' = m$である．すると

曜日計算法の証明

$$f_1(m) \equiv \left\lfloor \frac{13m+8}{5} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{13m'+8}{5} \right\rfloor + 1 \quad (mod\ 7)$$

である．また，補題 1，2 より，

$$\begin{aligned} &0q_1 + 5q_2 + 4q_3 + 5q_4 + 1q_5 \\ &\equiv (y-1) + \left\lfloor \frac{(y-1)}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(y-1)}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(y-1)}{400} \right\rfloor \\ &= y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor - 2 = y' + \left\lfloor \frac{y'}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y'}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y'}{400} \right\rfloor - 2 \quad (mod\ 7) \end{aligned}$$

が成り立つ．定義により， $L = 1$なので，したがって

$$\begin{aligned} &f_1(m) + 0u_1 + 1u_2 + 0q_1 + 5q_2 + 4q_3 + 5q_4 + 1q_5 + L + 1 \\ &= f_1(m) + (0u_1 + 1u_2) + (0q_1 + 5q_2 + 4q_3 + 5q_4 + 1q_5) + L + 1 \\ &\equiv \left(\left\lfloor \frac{13m'+8}{5} \right\rfloor + 1 \right) + (d-1) + \left(y' + \left\lfloor \frac{y'}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y'}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y'}{400} \right\rfloor - 2 \right) + 1 + 1 \\ &= y' + \left\lfloor \frac{y'}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y'}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y'}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{13m'+8}{5} \right\rfloor + d \quad (mod\ 7) \end{aligned}$$

が成り立つ． $3 \leqq m$のときは，定義により，$y' = y - 1$かつ$m' = m + 12$である．すると

$$f_1(m) \equiv \left\lfloor \frac{13(m+12)+8}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{13m'+8}{5} \right\rfloor \quad (mod\ 7)$$

となる．また，補題 2 より，

$$\begin{aligned} &0q_1 + 5q_2 + 4q_3 + 5q_4 + 1q_5 \\ &\equiv (y-1) + \left\lfloor \frac{(y-1)}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(y-1)}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(y-1)}{400} \right\rfloor \\ &= y' + \left\lfloor \frac{y'}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y'}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y'}{400} \right\rfloor \quad (mod\ 7) \end{aligned}$$

が成り立つ．定義により，$L = 0$なので，したがって

$$\begin{aligned} &f_1(m) + 0u_1 + 1u_2 + 0q_1 + 5q_2 + 4q_3 + 5q_4 + 1q_5 + L + 1 \\ &= f_1(m) + (0u_1 + 1u_2) + (0q_1 + 5q_2 + 4q_3 + 5q_4 + 1q_5) + L + 1 \\ &\equiv \left\lfloor \frac{13m'+8}{5} \right\rfloor + (d-1) + \left(y' + \left\lfloor \frac{y'}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y'}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y'}{400} \right\rfloor \right) + 0 + 1 \\ &= y' + \left\lfloor \frac{y'}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y'}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y'}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{13m'+8}{5} \right\rfloor + d \quad (mod\ 7) \end{aligned}$$

が成り立つ．■

曜日計算法の証明

補題 1． 関数$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$を，任意の$x \in \mathbb{Z}$について

$$f(x) = x + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{400} \right\rfloor$$

と定義する．するとこのとき，任意の$x \in \mathbb{Z}$について

$$f(x-1) = \begin{cases} f(x) - 1 & 4 \nmid x\text{のとき} \\ f(x) - 2 & 4 \mid x\text{かつ } 100 \nmid x\text{のとき} \\ f(x) - 1 & 100 \mid x\text{かつ } 400 \nmid x\text{のとき} \\ f(x) - 2 & 400 \mid x\text{のとき} \end{cases}$$

が成り立つ．

証明　a, bを任意の整数，ただし$0 < \mathrm{a}$とする．それでは

(i) $a \mid b$のとき，$\left\lfloor \frac{b-1}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor - 1.$

(ii) $a \nmid b$のとき，$\left\lfloor \frac{b-1}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor.$

であることを示す．q, q', r, r'を

$$b = aq + r, \qquad 0 \le r < a,$$
$$b - 1 = aq' + r', \qquad 0 \le r' < a$$

である整数とする．$a \mid b$のときは，$b = aq$かつ$r = 0$である．すると，

$$b - 1 = aq - 1 = a(q-1) + (a-1)$$

ただし，$0 \le a - 1 < a$なので，よって$q' = q - 1$，$r' = a - 1$となり，したがって

$$\left\lfloor \frac{b-1}{a} \right\rfloor = q' = q - 1 = \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor - 1$$

は成り立つ．$a \nmid b$のときは，$b = aq + r$，ただし$0 < r < a$となる．このとき，$0 \le r - 1 < a$であり，かつ

$$b - 1 = aq + (r - 1)$$

だから，よって$q' = q$，$r' = r - 1$となり，したがって

$$\left\lfloor \frac{b-1}{a} \right\rfloor = q' = q = \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor$$

は成り立つ．これで(i),(ii)は証明した．では，xを任意の整数とする．始めに，$4 \nmid x$を仮定する．このとき，(ii)より

$$\left\lfloor \frac{x-1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor$$

が成り立つ．$4 \nmid x$は$100 \nmid x$かつ$400 \nmid x$を意味するので，(ii)より

$$\left\lfloor \frac{x-1}{100} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{100} \right\rfloor,$$

$$\left\lfloor\frac{x-1}{400}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{x}{400}\right\rfloor$$

が成り立つ．結果

$$f(x-1) = (x-1) + \left\lfloor\frac{x-1}{4}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{x-1}{100}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x-1}{400}\right\rfloor$$

$$= (x-1) + \left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{x}{100}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x}{400}\right\rfloor$$

$$= \left(x + \left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{x}{100}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x}{400}\right\rfloor\right) - 1$$

$$= f(x) - 1$$

となる．次に，$4 \mid x$かつ $100 \nmid x$を仮定する．$100 \nmid x$は$400 \nmid x$を意味するので，(i), (ii)より

$$\left\lfloor\frac{x-1}{4}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor - 1,$$

$$\left\lfloor\frac{x-1}{100}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{x}{100}\right\rfloor,$$

$$\left\lfloor\frac{x-1}{400}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{x}{400}\right\rfloor$$

が成り立つ．結果

$$f(x-1) = (x-1) + \left\lfloor\frac{x-1}{4}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{x-1}{100}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x-1}{400}\right\rfloor$$

$$= (x-1) + \left(\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor - 1\right) - \left\lfloor\frac{x}{100}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x}{400}\right\rfloor$$

$$= \left(x + \left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{x}{100}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x}{400}\right\rfloor\right) - 2$$

$$= f(x) - 2$$

となる．次に，$100 \mid x$かつ $400 \nmid x$を仮定する．$100 \mid x$は$4 \mid x$を意味するので，(i), (ii)より

$$\left\lfloor\frac{x-1}{4}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor - 1,$$

$$\left\lfloor\frac{x-1}{100}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{x}{100}\right\rfloor - 1,$$

$$\left\lfloor\frac{x-1}{400}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{x}{400}\right\rfloor$$

が成り立つ．結果

$$f(x-1) = (x-1) + \left\lfloor\frac{x-1}{4}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{x-1}{100}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x-1}{400}\right\rfloor$$

$$= (x-1) + \left(\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor - 1\right) - \left(\left\lfloor\frac{x}{100}\right\rfloor - 1\right) + \left\lfloor\frac{x}{400}\right\rfloor$$

$$= \left(x + \left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{x}{100}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x}{400}\right\rfloor\right) - 1$$

$$= f(x) - 1$$

となる．次に，$400 \mid x$を仮定する．$400 \mid x$は，$4 \mid x$かつ$100 \mid x$を意味するので，(i)より

$$\left\lfloor\frac{x-1}{4}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor - 1,$$

$$\left\lfloor\frac{x-1}{100}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{x}{100}\right\rfloor - 1,$$

$$\left\lfloor\frac{x-1}{400}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{x}{400}\right\rfloor - 1$$

が成り立つ．結果

$$f(x-1) = (x-1) + \left\lfloor\frac{x-1}{4}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{x-1}{100}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x-1}{400}\right\rfloor$$

$$= (x-1) + \left(\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor - 1\right) - \left(\left\lfloor\frac{x}{100}\right\rfloor - 1\right) + \left(\left\lfloor\frac{x}{400}\right\rfloor - 1\right)$$

$$= \left(x + \left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{x}{100}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x}{400}\right\rfloor\right) - 2$$

$$= f(x) - 2$$

が成り立つ．■

補題 2． xを$0 \le x$である任意の整数とする．$q_i, r_i, i = 1,2,\cdots,5$を，

$$\begin{aligned} x &= 400q_1 + r_1, & 0 &\le r_1 < 400, \\ r_1 &= 100q_2 + r_2, & 0 &\le r_2 < 100, \\ r_2 &= 20q_3 + r_3, & 0 &\le r_3 < 20, \\ r_3 &= 4q_4 + r_4, & 0 &\le r_4 < 4, \\ r_4 &= 1q_5 + r_5, & 0 &\le r_5 < 1 \end{aligned}$$

である整数とする．するとこのとき，

$$0q_1 + 5q_2 + 4q_3 + 5q_4 + 1q_5 \equiv x + \left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{x}{100}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x}{400}\right\rfloor \quad (mod\ 7)$$

が成り立つ．

証明　$o_i, p_i, i = 1,2,3,4$を

$$\begin{aligned} x &= 400o_1 + p_1, & 0 &\le p_1 < 400, \\ x &= 100o_2 + p_2, & 0 &\le p_2 < 100, \\ x &= 4o_3 + p_3, & 0 &\le p_3 < 4, \end{aligned}$$

曜日計算法の証明

$$x = 1o_4 + p_4, \qquad 0 \leq p_4 < 1$$

である整数とする．するとこのとき，o_1とq_1はともにxを400で割った商なので，$o_1 = q_1$である．さらに，

$$x = 100o_2 + p_2$$

かつ

$$x = 400q_1 + 100q_2 + r_2$$

だから，$p_2 \equiv x \equiv r_2 \ (mod\ 100)$である．すると，$0 \leq p_2 < 100$, $0 \leq r_2 < 100$なので，よって$p_2 = r_2$が成り立つ．ゆえに

$$100o_2 = 400q_1 + 100q_2$$

であり，よって

$$o_2 = 4q_1 + q_2$$

である．また，

$$x = 4o_3 + p_3$$

かつ

$$x = 400q_1 + 100q_2 + 20q_3 + 4q_4 + r_4$$

だから，$p_3 \equiv x \equiv r_4 \ (mod\ 4)$である．すると，$0 \leq p_3 < 4$, $0 \leq r_4 < 4$なので，よって$p_3 = r_4$が成り立つ．ゆえに

$$4o_3 = 400q_1 + 100q_2 + 20q_3 + 4q_4$$

かつ

$$o_3 = 100q_1 + 25q_2 + 5q_3 + q_4$$

である．そして，

$$x = o_4$$

かつ

$$x = 400q_1 + 100q_2 + 20q_3 + 4q_4 + 1q_5$$

だから

$$o_4 = 400q_1 + 100q_2 + 20q_3 + 4q_4 + 1q_5$$

である．したがって，

$$x + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{400} \right\rfloor$$

$$= o_4 + o_3 - o_2 + o_1$$
$$= (400q_1 + 100q_2 + 20q_3 + 4q_4 + 1q_5) + (100q_1 + 25q_2 + 5q_3 + q_4) - (4q_1 + q_2) + q_1$$
$$= (400 + 100 - 4 + 1)q_1 + (100 + 25 - 1)q_2 + (20 + 5)q_3 + (4 + 1)q_4 + 1q_5$$
$$= 497q_1 + 124q_2 + 25q_3 + 5q_4 + 1q_5$$
$$\equiv 0q_1 + 5q_2 + 4q_3 + 5q_4 + 1q_5 \qquad (mod\ 7)$$

が成り立つ．■