指カレンダーの証明

作成日：2016 年 04 月 05 日

鈴木健太郎

y,m,dを$0 \le y$, $3 \le m \le 14$, $1 \le d \le 31$である任意の整数とする．$q_i, r_i, i = 1,2,\cdots,5$は,

$$\begin{aligned} y &= 400q_1 + r_1, & 0 \le r_1 < 400, \\ r_1 &= 100q_2 + r_2, & 0 \le r_2 < 100, \\ r_2 &= 20q_3 + r_3, & 0 \le r_3 < 20, \\ r_3 &= 4q_4 + r_4, & 0 \le r_4 < 4, \\ r_4 &= 1q_5 + r_5, & 0 \le r_5 < 1 \end{aligned}$$

である整数とする．$u_i, v_i, i = 1,2$を,

$$\begin{aligned} d - 1 &= 7u_1 + v_1, & 0 \le v_1 < 7, \\ v_1 &= 1u_2 + v_2, & 0 \le v_2 < 1 \end{aligned}$$

である整数とする．また，関数$f_1: \{3,4,\cdots,14\} \to \{0,1,\cdots,6\}$を,

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 & 4 & 0 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

と定義する．このとき,

$$\begin{aligned} & f_1(m) + 0u_1 + 1u_2 + 0q_1 + 5q_2 + 4q_3 + 5q_4 + 1q_5 + 3 \\ & \equiv y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{13m+8}{5} \right\rfloor + d \quad (mod\, 7) \end{aligned}$$

が成り立つことを証明する（右辺が **Zeller 公式**）.

【証明】

では始めに，関数$f_2: \{3,4,\cdots,14\} \to \mathbb{Z}$を,

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 31 & 61 & 92 & 122 & 153 & 184 & 214 & 245 & 275 & 306 & 337 \end{pmatrix}$$

と定義する．するとこのとき,

$$\begin{aligned} & 146097q_1 + 36524q_2 + 7305q_3 + 1461q_4 + 365q_5 + f_2(m) + 7u_1 + 1u_2 - 305 \\ & = 365y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{306(m+1)}{10} \right\rfloor + d - 428 \qquad (1) \end{aligned}$$

であることを示す（右辺が **Fairfield 公式**）．そのためにまずは,

指カレンダーの証明

$$146097q_1 + 36524q_2 + 7305q_3 + 1461q_4 + 365q_5$$
$$= 365y + \left\lfloor\frac{y}{4}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{y}{100}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{y}{400}\right\rfloor \qquad (1.1)$$

であることを示す．$o_i, p_i, i = 1,2,3,4$を

$$y = 400o_1 + p_1, \qquad 0 \le p_1 < 400,$$
$$y = 100o_2 + p_2, \qquad 0 \le p_2 < 100,$$
$$y = 4o_3 + p_3, \qquad 0 \le p_3 < 4,$$
$$y = 1o_4 + p_4, \qquad 0 \le p_4 < 1$$

である整数とする．するとこのとき，o_1とq_1はともにyを400で割った商なので，$o_1 = q_1$である．さらに，

$$y = 100o_2 + p_2$$

かつ

$$y = 400q_1 + 100q_2 + r_2$$

だから，$p_2 \equiv y \equiv r_2 \ (mod\ 100)$である．すると，$0 \le p_2 < 100$, $0 \le r_2 < 100$なので，よって$p_2 = r_2$が成り立つ．ゆえに

$$100o_2 = 400q_1 + 100q_2$$

であり，よって

$$o_2 = 4q_1 + q_2$$

である．また，

$$y = 4o_3 + p_3$$

かつ

$$y = 400q_1 + 100q_2 + 20q_3 + 4q_4 + r_4$$

だから，$p_3 \equiv y \equiv r_4 \ (mod\ 4)$である．すると，$0 \le p_3 < 4$, $0 \le r_4 < 4$なので，よって$p_3 = r_4$が成り立つ．ゆえに

$$4o_3 = 400q_1 + 100q_2 + 20q_3 + 4q_4$$

かつ

$$o_3 = 100q_1 + 25q_2 + 5q_3 + q_4$$

である．そして，

$$y = o_4$$

かつ

$$y = 400q_1 + 100q_2 + 20q_3 + 4q_4 + 1q_5$$

だから

$$o_4 = 400q_1 + 100q_2 + 20q_3 + 4q_4 + 1q_5$$

である．したがって，

$$365y + \left\lfloor\frac{y}{4}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{y}{100}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{y}{400}\right\rfloor$$

$$= 365o_4 + o_3 - o_2 + o_1$$
$$= 365(400q_1 + 100q_2 + 20q_3 + 4q_4 + 1q_5) + (100q_1 + 25q_2 + 5q_3 + q_4) - (4q_1 + q_2) + q_1$$
$$= (365 \cdot 400 + 100 - 4 + 1)q_1 + (365 \cdot 100 + 25 - 1)q_2 + (365 \cdot 20 + 5)q_3 + (365 \cdot 4 + 1)q_4 + (365 \cdot 1)q_5$$
$$= 146097q_1 + 36524q_2 + 7305q_3 + 1461q_4 + 365q_5$$

となり(1.1)が示された．では次に，

$$f_2(m) = \left\lfloor \frac{306(m+1)}{10} \right\rfloor - 122 \qquad (1.2)$$

であることを示す．しかしこれは容易に確認できる．例えば$m = 11$の場合は，

$$f_2(m) = 245 = 367 - 122 = \left\lfloor \frac{3672}{10} \right\rfloor - 122 = \left\lfloor \frac{306 \cdot 12}{10} \right\rfloor - 122 = \left\lfloor \frac{306(11+1)}{10} \right\rfloor - 122$$
$$= \left\lfloor \frac{306(m+1)}{10} \right\rfloor - 122$$

となる．(1.1),(1.2)が成り立つので，よって

$$146097q_1 + 36524q_2 + 7305q_3 + 1461q_4 + 365q_5 + f_2(m) + 7u_1 + 1u_2 - 305$$
$$= (146097q_1 + 36524q_2 + 7305q_3 + 1461q_4 + 365q_5) + f_2(m) + (7u_1 + 1u_2) - 305$$
$$= \left(365y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor\right) + \left(\left\lfloor \frac{306(m+1)}{10} \right\rfloor - 122\right) + (d-1) - 305$$
$$= 365y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{306(m+1)}{10} \right\rfloor + d - 428$$

であり(1)を証明した．よく知られているように

$$365y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{306(m+1)}{10} \right\rfloor + d - 428$$
$$\equiv y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{13m+8}{5} \right\rfloor + d \quad (mod\ 7)$$

が成り立つ．また，$f_1(m) \equiv f_2(m) \quad (mod\ 7)$なので，
したがって(1)より

$$0q_1 + 5q_2 + 4q_3 + 5q_4 + 1q_5 + f_1(m) + 0u_1 + 1u_2 + 3$$
$$\equiv 146097q_1 + 36524q_2 + 7305q_3 + 1461q_4 + 365q_5 + f_2(m) + 7u_1 + 1u_2 - 305$$
$$= 365y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{306(m+1)}{10} \right\rfloor + d - 428$$
$$\equiv y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{13m+8}{5} \right\rfloor + d \quad (mod\ 7)$$

である．

（証明終わり）