Zeller 公式の変形

作成日：2015 年 07 月 06 日
更新日：2015 年 07 月 08 日
鈴木健太郎

y, m, dを$0 \leq y$, $3 \leq m \leq 14$, $1 \leq d \leq 31$である任意の整数とする．$\mathrm{C}, \mathrm{C}', \mathrm{C}''$,Nを

$$y = 100\mathrm{C}' + \mathrm{N}, \qquad 0 \leq \mathrm{N} < 100,$$
$$\mathrm{C}' = 100\mathrm{C}'' + \mathrm{C}, \qquad 0 \leq \mathrm{C} < 100,$$

である任意の整数とする。このとき，

$$5(\mathrm{C}\%4) + 5\lfloor \mathrm{N}/4 \rfloor + (\mathrm{N}\%4) + \left\lfloor \frac{13m+8}{5} \right\rfloor + d$$
$$\equiv y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{13m+8}{5} \right\rfloor + d \quad (mod\, 7)$$

であることを証明する（右辺が **Zeller 公式**）．ただし，整数$\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{b} \neq 0$に対して，aをbで割った余りを$\mathrm{a}\%\mathrm{b}$と書く．

【証明】

整数q_i, r_i, $i = 1,2,3,4$を

$$y = 400q_1 + r_1, \qquad 0 \leq r_1 < 400,$$
$$r_1 = 100q_2 + r_2, \qquad 0 \leq r_2 < 100,$$
$$r_2 = 4q_3 + r_3, \qquad 0 \leq r_3 < 4,$$
$$r_3 = 1q_4 + r_4, \qquad 0 \leq r_4 < 1,$$

とおく．するとこのとき，

$$146097q_1 + 36524q_2 + 1461q_3 + 365q_4 = 365y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor \qquad (1)$$

であることを示す．$s_i, t_i \in \mathbb{Z}, i = 1,2,3,4$を

$$y = 400s_1 + t_1, \qquad 0 \leq t_1 < 400,$$
$$y = 100s_2 + t_2, \qquad 0 \leq t_2 < 100,$$
$$y = 4s_3 + t_3, \qquad 0 \leq t_3 < 4,$$
$$y = 1s_4 + t_4, \qquad 0 \leq t_4 < 1,$$

とすると，s_1とq_1はともにyを400で割った商なので，$s_1 = q_1$である．次に，

$$y = 100s_2 + t_2$$

かつ

$$y = 400q_1 + 100q_2 + r_2$$

だから，$t_2 \equiv y \equiv r_2 \ (mod\, 100)$であり，かつ$0 \leq t_2 < 100$, $0 \leq r_2 < 100$なので，よって$t_2 = r_2$

が成り立つ．したがって

$$100s_2 = 400q_1 + 100q_2$$

であり，よって

$$s_2 = 4q_1 + q_2$$

である．次に，

$$y = 4s_3 + t_3$$

かつ

$$y = 400q_1 + 100q_2 + 4q_3 + r_3$$

だから，$t_3 \equiv y \equiv r_3 \ (mod\ 4)$であり，かつ$0 \le t_3 < 4$，$0 \le r_3 < 4$なので，よって$t_3 = r_3$が成り立つ．したがって

$$4s_3 = 400q_1 + 100q_2 + 4q_3$$

かつ

$$s_3 = 100q_1 + 25q_2 + q_3$$

である．次に，

$$y = s_4$$

かつ

$$y = 400q_1 + 100q_2 + 4q_3 + 1q_4$$

だから

$$s_4 = 400q_1 + 100q_2 + 4q_3 + 1q_4$$

である．よって

$$365y + \left\lfloor\frac{y}{4}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{y}{100}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{y}{400}\right\rfloor$$

$$= 365s_4 + s_3 - s_2 + s_1$$

$$= 365(400q_1 + 100q_2 + 4q_3 + 1q_4) + (100q_1 + 25q_2 + q_3) - (4q_1 + q_2) + q_1$$

$$= (365 \cdot 400 + 100 - 4 + 1)q_1 + (365 \cdot 100 + 25 - 1)q_2 + (365 \cdot 4 + 1)q_3 + (365 \cdot 1)q_4$$

$$= 146097q_1 + 36524q_2 + 1461q_3 + 365q_4$$

となり(1)が示された．

次に，

$$\mathrm{C}\%4 = q_2, \qquad \lfloor \mathrm{N}/4 \rfloor = q_3, \qquad \mathrm{N}\%4 = q_4 \qquad (2)$$

であることを示す．まず，$\mathrm{C}' = 100\mathrm{C}'' + \mathrm{C}$なので，$\mathrm{C}' \equiv \mathrm{C}\ (mod\ 4)$である．また，$\mathrm{C}' = s_2 = 4q_1 + q_2$より，$\mathrm{C}' \equiv q_2\ (mod\ 4)$だから，したがって$\mathrm{C} \equiv \mathrm{C}' \equiv q_2\ (mod\ 4)$が成り立つ．一方で，$0 \le q_2 < 4$であることは容易に分かる．よって$\mathrm{C}\%4 = q_2$である．次に，$\mathrm{N} = t_2 = r_2$なので，$\lfloor \mathrm{N}/4 \rfloor = \lfloor r_2/4 \rfloor = q_3$である．さらに，$\mathrm{N}\%4 = r_2\%4 = r_3 = q_4$である．

したがって (1),(2)より，

Zeller 公式の変形

$$y+\left\lfloor\frac{y}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{y}{100}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{y}{400}\right\rfloor\equiv 365y+\left\lfloor\frac{y}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{y}{100}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{y}{400}\right\rfloor$$

$$=146097q_1+36524q_2+1461q_3+365q_4\equiv 5q_2+5q_3+q_4$$

$$=5(\mathrm{C}\%4)+5\lfloor \mathrm{N}/4\rfloor+(\mathrm{N}\%4)\qquad (mod\ 7)\qquad (3)$$

が得られた．(3)よりただちに，

$$5(\mathrm{C}\%4)+5\lfloor \mathrm{N}/4\rfloor+(\mathrm{N}\%4)+\left\lfloor\frac{13m+8}{5}\right\rfloor+d$$

$$\equiv y+\left\lfloor\frac{y}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{y}{100}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{y}{400}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{13m+8}{5}\right\rfloor+d\quad (mod\ 7)$$

は導かれる．

（証明終わり）