Fairfield公式とZeller公式の除法アルゴリズムの繰り返しによる計算法（簡易版）

作成日：2012年08月02日

更新日：2013年03月29日

鈴木健太郎

y, m, dを$0 \le y,\ 3 \le m \le 14,\ 1 \le d \le 31$である任意の整数とする．

$$
\begin{aligned}
y &= 400q_1 + r_1, &\quad 0 \le r_1 < 400,\\
r_1 &= 100q_2 + r_2, &\quad 0 \le r_2 < 100,\\
r_2 &= 40q_3 + r_3, &\quad 0 \le r_3 < 40,\\
r_3 &= 20q_4 + r_4, &\quad 0 \le r_4 < 20,\\
r_4 &= 8q_5 + r_5, &\quad 0 \le r_5 < 8,\\
r_5 &= 4q_6 + r_6, &\quad 0 \le r_6 < 4,\\
r_6 &= 1q_7 + r_7, &\quad 0 \le r_7 < 1,
\end{aligned}
$$

ただし，$q_i, r_i \in \mathbb{Z}, i = 1,2,\cdots,7$,

$$
\begin{aligned}
m - 3 &= 5s_1 + t_1, &\quad 0 \le t_1 < 5,\\
t_1 &= 2s_2 + t_2, &\quad 0 \le t_2 < 2,\\
t_2 &= 1s_3 + t_3, &\quad 0 \le t_3 < 1,
\end{aligned}
$$

ただし，$s_i, t_i \in \mathbb{Z}, i = 1,2,3$,

$$
\begin{aligned}
d - 1 &= 7u_1 + v_1, &\quad 0 \le v_1 < 7,\\
v_1 &= 1u_2 + v_2, &\quad 0 \le v_2 < 1,
\end{aligned}
$$

ただし，$u_i, v_i \in \mathbb{Z}, i = 1,2$，とするとき，

$$
\begin{aligned}
&0q_1 + 5q_2 + 1q_3 + 4q_4 + 3q_5 + 5q_6 + 1q_7 + 6s_1 + 5s_2 + 3s_3 + 0u_1 + 1u_2 + 3\\
&\equiv y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{13m + 8}{5} \right\rfloor + d \quad (mod\ 7)
\end{aligned}
$$

が成り立つことを証明する（右辺が **Zeller公式**）．

【証明】

では始めに

$$
\begin{aligned}
&146097q_1 + 36524q_2 + 14610q_3 + 7305q_4 + 2922q_5 + 1461q_6 + 365q_7 + 153s_1 + 61s_2\\
&\qquad + 31s_3 + 7u_1 + 1u_2 - 305\\
&= 365y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{306(m+1)}{10} \right\rfloor + d - 428 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

であることを証明する（右辺が **Fairfield公式**）．そのためにまずは，

$$
\begin{aligned}
&146097q_1 + 36524q_2 + 14610q_3 + 7305q_4 + 2922q_5 + 1461q_6 + 365q_7\\
&= 365y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

であることを示す．$o_i, p_i \in \mathbb{Z}, i = 1,2,3,4$を

$$y = 400o_1 + p_1, \qquad 0 \le p_1 < 400,$$
$$y = 100o_2 + p_2, \qquad 0 \le p_2 < 100,$$
$$y = 4o_3 + p_3, \qquad 0 \le p_3 < 4,$$
$$y = 1o_4 + p_4, \qquad 0 \le p_4 < 1,$$

とすると，o_1とq_1はともにyを400で割った商なので，$o_1 = q_1$である．次に，

$$y = 100o_2 + p_2$$

かつ

$$y = 400q_1 + 100q_2 + r_2$$

だから，$y \equiv p_2 \equiv r_2\ (mod\ 100)$であり，かつ$0 \le p_2 < 100$，$0 \le r_2 < 100$なので，よって$p_2 = r_2$が成り立つ．したがって

$$100o_2 = 400q_1 + 100q_2$$

であり，よって

$$o_2 = 4q_1 + q_2$$

である．次に，

$$y = 4o_3 + p_3$$

かつ

$$y = 400q_1 + 100q_2 + 40q_3 + 20q_4 + 8q_5 + 4q_6 + r_6$$

だから，$y \equiv p_3 \equiv r_6\ (mod\ 4)$であり，かつ$0 \le p_3 < 4$，$0 \le r_6 < 4$なので，よって$p_3 = r_6$が成り立つ．したがって

$$4o_3 = 400q_1 + 100q_2 + 40q_3 + 20q_4 + 8q_5 + 4q_6$$

かつ

$$o_3 = 100q_1 + 25q_2 + 10q_3 + 5q_4 + 2q_5 + q_6$$

である．次に，

$$y = o_4$$

かつ

$$y = 400q_1 + 100q_2 + 40q_3 + 20q_4 + 8q_5 + 4q_6 + 1q_7$$

だから

$$o_4 = 400q_1 + 100q_2 + 40q_3 + 20q_4 + 8q_5 + 4q_6 + 1q_7$$

である．よって

$$365y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor$$

$$= 365o_4 + o_3 - o_2 + o_1$$

$$= 365(400q_1 + 100q_2 + 40q_3 + 20q_4 + 8q_5 + 4q_6 + 1q_7) + (100q_1 + 25q_2 + 10q_3 + 5q_4 + 2q_5 + q_6) - (4q_1 + q_2) + q_1$$

$$= (365\cdot 400 + 100 - 4 + 1)q_1 + (365\cdot 100 + 25 - 1)q_2 + (365\cdot 40 + 10)q_3$$
$$+ (365\cdot 20 + 5)q_4 + (365\cdot 8 + 2)q_5 + (365\cdot 4 + 1)q_6 + (365\cdot 1)q_7$$
$$= 146097q_1 + 36524q_2 + 14610q_3 + 7305q_4 + 2922q_5 + 1461q_6 + 365q_7$$

となり(1.1)が示された．では次に，

$$153s_1 + 61s_2 + 31s_3 = \left\lfloor \frac{306(m+1)}{10} \right\rfloor - 122 \qquad (1.2)$$

であることを示す．しかしこれは容易に確認できる．例えば$m = 11$の場合は，

$$153s_1 + 61s_2 + 31s_3 = 153\cdot 1 + 61\cdot 1 + 31\cdot 1 = 153 + 61 + 31 = 245 = 367 - 122$$
$$= \left\lfloor \frac{3672}{10} \right\rfloor - 122 = \left\lfloor \frac{306\cdot 12}{10} \right\rfloor - 122 = \left\lfloor \frac{306(11+1)}{10} \right\rfloor - 122$$
$$= \left\lfloor \frac{306(m+1)}{10} \right\rfloor - 122$$

となる．(1.1),(1.2)が成り立つので，よって

$$146097q_1 + 36524q_2 + 14610q_3 + 7305q_4 + 2922q_5 + 1461q_6 + 365q_7 + 153s_1 + 61s_2$$
$$+ 31s_3 + 7u_1 + 1u_2 - 305$$
$$= (146097q_1 + 36524q_2 + 14610q_3 + 7305q_4 + 2922q_5 + 1461q_6 + 365q_7)$$
$$+ (153s_1 + 61s_2 + 31s_3) + (7u_1 + 1u_2) - 305$$
$$= \left(365y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor\right) + \left(\left\lfloor \frac{306(m+1)}{10} \right\rfloor - 122\right) + (d-1) - 305$$
$$= 365y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{306(m+1)}{10} \right\rfloor + d - 428$$

であり(1)を証明した．よく知られているように

$$365y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{306(m+1)}{10} \right\rfloor + d - 428$$
$$\equiv y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{13m+8}{5} \right\rfloor + d \quad (mod\ 7)$$

なので，したがって(1)より

$$0q_1 + 5q_2 + 1q_3 + 4q_4 + 3q_5 + 5q_6 + 1q_7 + 6s_1 + 5s_2 + 3s_3 + 0u_1 + 1u_2 + 3$$
$$\equiv 146097q_1 + 36524q_2 + 14610q_3 + 7305q_4 + 2922q_5 + 1461q_6 + 365q_7 + 153s_1 + 61s_2$$
$$+ 31s_3 + 7u_1 + 1u_2 - 305$$
$$= 365y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{306(m+1)}{10} \right\rfloor + d - 428$$
$$\equiv y + \left\lfloor \frac{y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y}{400} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{13m+8}{5} \right\rfloor + d \quad (mod\ 7)$$

である．

（証明終わり）